VEREINFACHTE FORMELN FÜR DIE TRIGONOMETRISCHE DURCHRECHNUNG OPTISCHER SYSTEME

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

EINGEREICHT VON

MAX LANGE
MATHEMATIKER AN DER OPTISCHEN ANSTALT C. P. GOERZ

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1909

REFERENT: HERR Prof. Dr. WEBER.

HERRN

KOMMERZIENRAT GOERZ

GEWIDMET

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551526_0105

Einleitung.

Die geometrische Optik zeigt eine Eigentümlichkeit, die in diesem Maße wohl noch bei keinem andern Zweige der mathematischen Physik zu Tage getreten ist. Ihre Formeln sind von einer solchen Beschaffenheit, daß die Aufstellung allgemeiner Resultate in mathematischen Zeichen weniger an der Qualität, als vielmehr an der Quantität der vorzunehmenden Operationen scheitert. In gewissen Fällen hilft man sich über diese Schwierigkeit hinweg, indem man die für einen besonderen Zweck unwesentlichen Fehlergrößen vernachlässigt und sich mit einer Annäherung zufrieden gibt. Wer sich jedoch, wie der Konstrukteur optischer Systeme, die Aufgabe stellt, nach Möglichkeit alle Fehler zu beseitigen oder wenigstens unmerklich zu machen, muß einen anderen Weg einschlagen. Er ist auf die trigonometrische Durchrechnung angewiesen, d. h. auf die zahlenmäßige Berechnung sämtlicher Glieder einer rekurrenten Reihe, deren Innenglieder der Theoretiker zu eliminieren bestrebt ist. Die Festlegung der bezüglichen Rekursionsformeln ist Sache des Mathematikers, der dabei die Aufgabe zu lösen hat, dem Formelsystem eine solche Gestalt zu geben, daß die Anwendung desselben bei Benutzung von Logarithmentafeln ein Minimum der Arbeitsleistung erfordert.

Nach dieser Richtung glaubt Verf. einen Schritt vorwärts getan zu haben. Er hat ferner das Bestreben gehabt, für sämtliche in Betracht kommenden Gleichungen eine einheitliche Bezeichnung einzuführen, die zudem den Vorzug haben soll, leicht lesbar zu sein. Von der Anwendung deutscher Buchstaben als Größensymbole ist deshalb ganz abgesehen worden, da sich die deutschen und lateinischen Lettern in der Aussprache nur schwer unterscheiden lassen. — Anregung zu der Arbeit erhielt Verf. während seiner Tätigkeit bei der Optischen Anstalt C. P. Goerz durch den wissenschaftlichen Mitarbeiter der Firma, Herrn W. Zschokke, der auch die Zahlenbeispiele in seinem Bureau berechnen ließ.

Im folgenden sind Formeln abgeleitet für die Lichtbrechung an

I. einer beliebigen Fläche mit beliebigen Anfangskonstanten des Lichtstrahles

II. speziellen Flächen mit beliebigen Anfangskonstanten des Lichtstrahles

a) einer Ebene

b) einer Kugelfläche

c) einer Zylinderfläche

III. speziellen Flächen (Ebene, Kugelfläche) mit speziellen Anfangskonstanten des Lichtstrahls

a) für Strahlen mit endlicher Neigung gegen die Achse
   1. an einer Ebene
   2. an einer Kugelfläche

b) für Zentralstrahlen mit unendlich kleiner Neigung gegen die Achse

c) für Strahlen, die einem Strahl der Art IIIa unendlich benachbart sind (sog. Meridionalstrahlen)

(Der eintretende Strahl liegt in einer Ebene mit einer festen, durch den Kugelmittelpunkt gehenden Geraden, der Achse)

d) für Strahlen, die einem Strahl der Art IIIa unendlich benachbart sind, jedoch mit ihm eine Ebene senkrecht zu der unter IIIa, b, c angenommenen bilden (sog. Sagittalstrahlen).

Bei allen diesen Fällen mit Ausnahme von IIIa, wo eine Verbesserung wohl nicht mehr zu erzielen ist, dürfte sich für den Rechner eine Vereinfachung ergeben, die darin besteht, daß entweder, wie bei IIb, schwierige Vorzeichenbestimmungen (die z. B. den Seidelschen Formeln eigentümlich sind) vermieden werden und die Rechnung sich besonders übersichtlich gestaltet, oder eine Verkürzung der Formeln eintritt, wie bei IIIc und namentlich IIId. Für IIIb sind absichtlich nicht die kürzesten, aus der Kettenbruchentwicklung abzuleitenden, Formeln angeführt. Verf. hat vielmehr auf Rat des Herrn Zschokke die Beziehung so ausgedrückt, daß zu jeder Brechung der Wert des Winkels α gegen die Achse direkt errechnet wird. Man hat damit stets ein Kriterium über die sammelnde oder zerstreuende Wirkung der brechenden Fläche. Durch die Einführung der Größen h_ν erhält man hier zudem eine Erhöhung der Genauigkeit der logarithmischen Rechnung. Die Formeln IIc schließlich dürften überhaupt zum ersten Male entwickelt sein, während die unter IIb hergeleiteten von den bisher üblichen erheblich abweichen.

I. Brechung an einer beliebigen Fläche mit beliebigen Anfangskonstanten des Lichtstrahls.

Die Grenzfläche zwischen zwei optischen Medien sei in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$\varphi_\nu(x, y, z) = 0$$

bestimmt.

Ein Lichtstrahl treffe die Fläche im Punkte (x_ν, y_ν, z_ν) und bilde mit den Richtungen der Koordinatenachsen die Winkel $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$. Sind (a_ν, b_ν, c_ν) die Winkel der Flächennormale im Punkte (x_ν, y_ν, z_ν) mit den Richtungen der Koordinatenachsen, also

$$\cos a_\nu = \lambda \left[\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x}\right]_{x=x_\nu,\ y=y_\nu,\ z=z_\nu}$$

$$\cos b_\nu = \lambda \left[\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y}\right]_{x=x_\nu,\ y=y_\nu,\ z=z_\nu}$$

$$\cos c_\nu = \lambda \left[\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z}\right]_{x=x_\nu,\ y=y_\nu,\ z=z_\nu},$$

so erfüllt der Winkel ω_ν zwischen dieser Normalen und dem Lichtstrahl die Gleichung:

$$\sin^2 \omega_\nu = (\cos \beta_\nu \cos c_\nu - \cos \gamma_\nu \cos b_\nu)^2 + (\cos \gamma_\nu \cos a_\nu - \cos \alpha_\nu \cos c_\nu)^2 + (\cos \alpha_\nu \cos b_\nu - \cos \beta_\nu \cos a_\nu)^2. \tag{1}$$

Die Gleichung der Einfallsebene, d. h. der durch den Strahl und die Flächennormale bestimmten Ebene, lautet:

$$(x - x_\nu)(\cos \beta_\nu \cos c_\nu - \cos \gamma_\nu \cos b_\nu) + (y - y_\nu)(\cos \gamma_\nu \cos a_\nu - \cos \alpha_\nu \cos c_\nu) + (z - z_\nu)(\cos \alpha_\nu \cos b_\nu - \cos \beta_\nu \cos a_\nu) = 0. \tag{2}$$

Im folgenden sollen stets die Konstanten des gebrochenen Strahls von denen des eintretenden durch einen beigefügten Strich unterschieden sein. Dann ist die Gleichung der Austrittsebene, d. h. der durch den austretenden Strahl und die Flächennormale bestimmten Ebene,

$$(x - x_\nu)(\cos \beta'_\nu \cos c_\nu - \cos \gamma'_\nu \cos b_\nu) + (y - y_\nu)(\cos \gamma'_\nu \cos a_\nu - \cos \alpha'_\nu \cos c_\nu) + (z - z_\nu)(\cos \alpha'_\nu \cos b_\nu - \cos \beta'_\nu \cos a_\nu) = 0. \tag{3}$$

Da nach dem Brechungsgesetz Eintritts- und Austrittsebene identisch sein sollen, so können die Koeffizienten von $(x - x_\nu)$, $(y - y_\nu)$, $(z - z_\nu)$ in (2) und (3) nur um einen konstanten Faktor verschieden sein. Bezeichnet man mit n_ν den Brechungsindex des Mediums für den eintretenden, mit n'_ν den des Mediums für den austretenden Strahl, so fordert das Brechungsgesetz

$$n_\nu \sin \omega_\nu = n'_\nu \sin \omega'_\nu. \tag{4}$$

Daraus folgt, in Verbindung mit (1), daß die Koeffizienten von (2) und (3) genau übereinstimmen, wenn man (2) mit n_ν und (3) mit n'_ν multipliziert.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \xi_\nu &= n_\nu \cos \alpha_\nu, \quad \xi'_\nu = n'_\nu \cos \alpha'_\nu \\ \eta_\nu &= n_\nu \cos \beta_\nu, \quad \eta'_\nu = n'_\nu \cos \beta'_\nu \\ \zeta_\nu &= n_\nu \cos \gamma_\nu, \quad \zeta'_\nu = n'_\nu \cos \gamma'_\nu, \end{aligned} \tag{5}$$

so wird

$$\begin{aligned} \eta_\nu \cos c_\nu - \zeta_\nu \cos b_\nu &= \eta'_\nu \cos c_\nu - \zeta'_\nu \cos b_\nu \\ \zeta_\nu \cos a_\nu - \xi_\nu \cos c_\nu &= \zeta'_\nu \cos a_\nu - \xi'_\nu \cos c_\nu \\ \xi_\nu \cos b_\nu - \eta_\nu \cos a_\nu &= \xi'_\nu \cos b_\nu - \eta'_\nu \cos a_\nu. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieses Gleichungssystem kann auch geschrieben werden

$$\frac{\xi_\nu' - \xi_\nu}{\cos a_\nu} = \frac{\eta_\nu' - \eta_\nu}{\cos b_\nu} = \frac{\zeta_\nu' - \zeta_\nu}{\cos c_\nu} \quad (7)$$ [1])

oder

$$\begin{aligned} \xi_\nu' &= \xi_\nu + \tau_\nu \cos a_\nu \\ \eta_\nu' &= \eta_\nu + \tau_\nu \cos b_\nu \\ \zeta_\nu' &= \zeta_\nu + \tau_\nu \cos c_\nu. \end{aligned} \quad (8)$$

Multipliziert man jede dieser Gleichungen mit dem in ihr vorkommenden Koeffizienten von τ_ν und addiert, so wird

$$\xi_\nu' \cos a_\nu + \eta_\nu' \cos b_\nu + \zeta_\nu' \cos c_\nu = \xi_\nu \cos a_\nu + \eta_\nu \cos b_\nu + \zeta_\nu \cos c_\nu + \tau_\nu. \quad (9)$$

Nun ist

$$\xi_\nu \cos a_\nu + \eta_\nu \cos b_\nu + \zeta_\nu \cos c_\nu = n_\nu \cos \omega_\nu, \quad (10)$$

folglich

$$\tau_\nu = n_\nu' \cos \omega_\nu' - n_\nu \cos \omega_\nu. \quad (11)$$

Die Gleichungen des gebrochenen Strahls können geschrieben werden

$$\begin{aligned} x &= x_\nu + t\xi_\nu' \\ y &= y_\nu + t\eta_\nu' \\ z &= z_\nu + t\zeta_\nu'. \end{aligned} \quad (12)$$

Faßt man diesen Strahl wieder als eintretenden Strahl einer weiteren $(\nu+1)^{\text{ten}}$ brechenden Fläche auf, so wird

$$\begin{aligned} \xi_\nu' &= \xi_{\nu+1} \\ \eta_\nu' &= \eta_{\nu+1} \\ \zeta_\nu' &= \zeta_{\nu+1} \\ n_\nu' &= n_{\nu+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Setzt man schließlich noch in die Gleichung der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Fläche die Werte von x, y, z gemäß (12) und (13) ein und bestimmt die Wurzeln inbezug auf t, von denen eine als Repräsentantin $t_{\nu+1}$ sein möge, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} &= x_\nu + t_{\nu+1}\xi_{\nu+1} \\ y_{\nu+1} &= y_\nu + t_{\nu+1}\eta_{\nu+1} \\ z_{\nu+1} &= z_\nu + t_{\nu+1}\xi_{\nu+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Anwendung des Formelsystems (8), (11), (14) soll im folgenden an einigen häufiger auftretenden Beispielen durchgeführt werden. Dabei kann es vorkommen, daß die im allgemeinen Falle durch (8), (11), (14) ausgedrückte Vereinfachung der Berechnung im speziellen Falle durch spezielle Vereinfachungen zu ergänzen resp. zu ersetzen ist.

1) In etwas anderer Weise entwickelt diese Beziehungen A. Gleichen in seinen „Vorlesungen über photographische Optik", (Leipzig 1905) § 54.

II. Brechung von Strahlen mit beliebigen Anfangskonstanten an speziellen Flächen.

a) Die brechende Fläche ist eine zur YZ-Ebene parallele Ebene.

Ist die ν^{te} brechende Fläche eine zur YZ-Ebene parallele Ebene, so lautet ihre Gleichung

$$x = \text{konst} = k_\nu .$$

Hat der eintretende Strahl entsprechend (12) die Gleichungen

$$x = x_{\nu-1} + t\xi_\nu$$
$$y = y_{\nu-1} + t\eta_\nu$$
$$z = z_{\nu-1} + t\zeta_\nu ,$$

so erhält man durch Einsetzen in die Gleichung der brechenden Fläche:

$$t_\nu = \frac{k_\nu - x_{\nu-1}}{\xi_\nu}$$
$$x_\nu = k_\nu$$
$$y_\nu = y_{\nu-1} + \frac{(k_\nu - x_{\nu-1})n_\nu}{\xi_\nu}$$
$$z_\nu = z_{\nu-1} + \frac{(k_\nu - x_{\nu-1})\zeta_\nu}{\xi_\nu} .$$

Für die Richtungskosinus der Flächennormalen im Punkte (x_ν, y_ν, z_ν) ergibt sich:

$$\cos a_\nu = 1, \quad \cos b_\nu = 0, \quad \cos c_\nu = 0$$

und demnach

$$\xi'_\nu = \xi_{\nu+1} = \xi_\nu + \tau_\nu$$
$$\eta'_\nu = \eta_{\nu+1} = \eta_\nu$$
$$\zeta'_\nu = \zeta_{\nu+1} = \zeta_\nu .$$

Ferner ist

$$(15) \quad \cos \omega_\nu = \cos \alpha_\nu \cos a_\nu + \cos \beta_\nu \cos b_\nu + \cos \gamma_\nu \cos c_\nu = \cos \alpha_\nu = \frac{\xi_\nu}{n_\nu}$$

$$\sin \omega'_\nu = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \sin \omega_\nu$$

$$\tau_\nu = n_{\nu+1} \cos \omega'_\nu - n_\nu \cos \omega_\nu = n_{\nu+1} \cos \omega'_\nu - \xi_\nu .$$

Durch Einsetzen dieses Wertes für τ_ν wird

$$\xi'_\nu = n_{\nu+1} \cos \omega'_\nu .$$

Man erhält also für die Brechung an der durch die Gleichung $x = k_\nu$ definierten Ebene folgende Rekursionsformeln:

$$x_\nu = k_\nu$$

$$y_\nu = y_{\nu-1} + \frac{k_\nu - x_{\nu-1}}{\xi_\nu} \cdot \eta_\nu$$

$$z_\nu = z_{\nu-1} + \frac{k_\nu - x_{\nu-1}}{\xi_\nu} \cdot \zeta_\nu$$

$$\cos \omega_\nu = \frac{\xi_\nu}{n_\nu}$$

$$\sin \omega'_\nu = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \sin \omega_\nu$$

$$\xi_{\nu+1} = n_{\nu+1} \cos \omega'_\nu$$

$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu$$

$$\zeta_{\nu+1} = \zeta_\nu .$$

b) **Die brechende Fläche ist eine Kugel, deren Mittelpunkt auf der *X*-Achse liegt.**

Ist die brechende Fläche eine Kugel mit endlichem Radius r_ν und dem Mittelpunkt $(k_\nu, 0, 0)$, so lautet ihre Gleichung:

$$(x - k_\nu)^2 + y^2 + z^2 = r_\nu^2 .$$

Durch Einsetzen von

$$x = x_{\nu-1} + t\xi_\nu$$

$$y = y_{\nu-1} + t\eta_\nu$$

$$z = z_{\nu-1} + t\zeta_\nu$$

erhält man, wenn noch

$$x_{\nu-1} - k_\nu = x^*_{\nu-1}$$

gesetzt wird,

$$x^{*2}_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} + z^2_{\nu-1} + 2t(x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu) + t_\nu^2 n_\nu^2 = r_\nu^2 .$$

Danach wird

$$(17) \quad t_\nu = \frac{-(x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu) \pm \sqrt{(x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu)^2 - n_\nu^2(x^2_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} + z^2_\nu}}{n_\nu^2}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} x_\nu &= x_{\nu-1} + t_\nu \xi_\nu \\ y_\nu &= y_{\nu-1} + t_\nu \eta_\nu \\ z_\nu &= z_{\nu-1} + t_\nu \zeta_\nu . \end{aligned}$$

Die Richtungskosinus der Normalen im Schnittpunkt des Strahls mit der Kugelfläche sind

$$\cos a_\nu = \frac{x_\nu - k_\nu}{r_\nu}$$

(19) $$\cos b_\nu = \frac{y_\nu}{r_\nu}$$

$$\cos c_\nu = \frac{z_\nu}{r_\nu}.$$

Multipliziert man jede der drei Gleichungen (18) mit dem in ihr vorkommenden Koeffizienten von t_ν und addiert, so ergibt sich

$$x_\nu \xi_\nu + y_\nu \eta_\nu + z_\nu \zeta_\nu = x_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu + t_\nu n_\nu^2$$

oder

$$(x_\nu - k_\nu)\xi_\nu + y_\nu \eta_\nu + z_\nu \zeta_\nu = x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu + t_\nu n_\nu^2$$

und unter Berücksichtigung von (15), (17) und (19)

$$r_\nu \cos \omega_\nu = \sqrt{(x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu)^2 - n_\nu^2 (x^{*2}_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} + z^2_{\nu-1})}.$$

Setzt man

$$x^{*2}_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} + z^2_{\nu-1} = R^2_{\nu-1}$$

$$x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu = n_\nu R_{\nu-1} \cos \sigma_{\nu-1},$$

so wird

$$n_\nu r_\nu \cos \omega_\nu = \sqrt{n_\nu^2 R^2_{\nu-1} \cos^2 \sigma_{\nu-1} - n_\nu^2 R^2_{\nu-1} + n_\nu^2 r_\nu^2}$$

$$r_\nu \cos \omega_\nu = \sqrt{r_\nu^2 - R^2_{\nu-1} \sin^2 \sigma_{\nu-1}}$$

$$\sin \omega_\nu = \frac{R_{\nu-1}}{r_\nu} \sin \sigma_{\nu-1}.$$

Ist die vorhergehende $(\nu-1)^{\text{te}}$ brechende Fläche eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt, so vereinfacht sich die Berechnung von $R_{\nu-1}$ und $\cos \sigma_{\nu-1}$ wegen des Bestehens der Gleichungen

$$x_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + z_{\nu-1}\zeta_\nu = n_\nu r_{\nu-1} \cos \omega'_{\nu-1}$$

$$x^2_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} + z^2_{\nu-1} = r^2_{\nu-1}.$$

Man erhält unter Benutzung dieser Beziehungen

$$R^2_{\nu-1} = r^2_{\nu-1} - 2k_\nu x_{\nu-1} + k_\nu^2$$

$$= (r_{\nu-1} - k_\nu)^2 + 2k_\nu (r_{\nu-1} - x_{\nu-1})$$

$$R_{\nu-1} \cos \sigma_{\nu-1} = r_{\nu-1} \cos \omega'_{\nu-1} - \frac{k_\nu \xi_\nu}{n_\nu}.$$

An der ersten brechenden Fläche wird der eintretende Strahl meist durch die Koordinaten seines Schnittpunktes mit dieser Fläche und die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ mit den Koordinatenachsen bestimmt sein. In dem fast nur vorkommenden Falle, daß das erste Medium die Luft, also $n_1 = 1$ ist, wird dann

$$\xi_1 = \cos\alpha_1$$
$$\eta_1 = \cos\beta_1$$
$$\zeta_1 = \cos\gamma_1 .$$

Der Einfallswinkel ω_1 wird bei einer Kugelfläche bestimmt aus

$$\cos\omega_1 = \frac{x_1 \cdot \xi_1}{r_1} + \frac{y_1 \cdot \eta_1}{r_1} + \frac{z_1 \cdot \zeta_1}{r_1} .$$

Dabei ist der Mittelpunkt der Kugelfläche zum Koordinatenanfangspunkt gewählt, d. h $k_1 = 0$ gesetzt.

Sind Strahlen durch mehrere aufeinanderfolgende Kugelflächen zu berechnen, so tut man gut, bei der Bestimmung der Brechung an der ν^{ten} Fläche den Mittelpunkt der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Kugel als Nullpunkt zu wählen. Diese Verschiebung nach jedesmaliger Brechung findet darin ihren Ausdruck, daß allgemein bei der Berechnung von x_ν noch k_ν zu subtrahieren ist. Die Formeln haben dann folgende endgiltige Gestalt:

$$\tau_\nu = n_{\nu+1}\cos\omega'_\nu - n_\nu\cos\omega_\nu$$
$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu + \frac{\tau_\nu \cdot x_\nu}{r_\nu}$$
$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \frac{\tau_\nu \cdot y_\nu}{r_\nu}$$
$$\zeta_{\nu+1} = \zeta_\nu + \frac{\tau_\nu \cdot z_\nu}{r_\nu}$$
$$R_\nu = \sqrt{(r_\nu - k_{\nu+1})^2 + 2k_{\nu+1}(r_\nu - x_\nu)}$$
$$\cos\sigma_\nu = \frac{1}{R_\nu}\left(r_\nu\cos\omega'_\nu - \frac{k_{\nu+1}\,\xi_{\nu+1}}{n_{\nu+1}}\right)$$
$$\sin\omega_{\nu+1} = \frac{R_\nu \sin\sigma_\nu}{r_{\nu+1}}$$
$$\sin\omega'_{\nu+1} = \frac{n_{\nu+1}}{n_{\nu+2}}\sin\omega_{\nu+1}$$
$$t_{\nu+1} = \frac{1}{n_{\nu+1}}\left(r_{\nu+1}\cos\omega_{\nu+1} - R_\nu\cos\sigma_\nu\right)$$
$$x_{\nu+1} = x_\nu - k_{\nu+1} + t_{\nu+1}\,\xi_{\nu+1}$$
$$y_{\nu+1} = y_\nu + t_{\nu+1}\,\eta_{\nu+1}$$
$$z_{\nu+1} = z_\nu + t_{\nu+1}\,\zeta_{\nu+1} .$$

Die Größen k sind hierbei stets die Entfernungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kugelmittelpunkten.

Da zu einem Wert von $\sin\omega_{\nu+1}$ stets ein positiver und ein negativer Wert von $\cos\omega_{\nu+1}$ gehört, so wird $t_{\nu+1}$ zweideutig. Diese Zweideutigkeit wird geometrisch verständlich durch die Überlegung, daß eine Kugel

von einer Geraden allgemein in zwei Punkten durchstoßen wird, und daß $t_{\nu+1}$ nach der Definition aus den Gleichungen (12) und (14) nichts anderes ist, als die durch $n_{\nu+1}$ dividierte Entfernung vom Durchstoßungspunkt der ν^{ten} zu dem der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Fläche. Da in der Praxis nur derjenige Durchstoßungspunkt in Betracht kommt, der zuerst vom Lichtstrahl getroffen wird, so ergibt sich die einfache Regel, daß der kleinere Wert von $t_{\nu+1}$ zu wählen ist, wenn die Linse der Lichtrichtung die konvexe Seite zukehrt, andernfalls der größere. Nach der Formel wird aber die Zweideutigkeit von $t_{\nu+1}$ durch das Vorzeichen von $\cos\omega_{\nu+1}$ bewirkt. Demnach ist also bei konvexer Krümmung der Linse nach der Lichtseite $\cos\omega_{\nu+1}$ negativ zu nehmen, bei konkaver positiv.

c) Die brechende Fläche ist eine Zylinderfläche, deren Achse die optische Achse schneidet.

Die brechende Fläche sei eine Zylinderfläche, deren Achse die X-Achse schneidet. Da in der Praxis nur der Fall von parallelen oder senkrecht sich kreuzenden Zylinderachsen in Betracht kommt, sollen hier nur solche Zylinderflächen behandelt werden, deren Achse zur Y- oder Z-Achse parallel ist. Es sei demnach zunächst die Gleichung der ν^{ten} Fläche

$$(x-k_\nu)^2+y^2=r_\nu^2,$$

die Achse des Zylinders also parallel zur Z-Richtung.

Durch Einsetzen der Werte von x und y aus den Gleichungen des eintretenden Strahls erhält man, nachdem wiederum $x_{\nu-1}-k_\nu=x^*_{\nu-1}$ gesetzt ist,

$$x^{*2}_{\nu-1}+y^2_{\nu-1}+2t(x^*_{\nu-1}\xi_\nu+y_{\nu-1}\eta_\nu)+t^2(\xi_\nu^2+\eta_\nu^2)=r_\nu^2$$

$$(20)\quad t_\nu=\frac{-(x^*_{\nu-1}\xi_\nu+y_{\nu-1}\eta_\nu)\pm\sqrt{(x^*_{\nu-1}\xi_\nu+y_{\nu-1}\eta_\nu)^2-(\xi_\nu^2+\eta_\nu^2)(x^{*2}_{\nu-1}+y^2_{\nu-1}-r_\nu^2)}}{\xi_\nu^2+\eta_\nu^2}$$

$$(21)\quad \begin{aligned} x_\nu&=x_{\nu-1}+t_\nu\xi_\nu\\ y_\nu&=y_{\nu-1}+t_\nu\eta_\nu\\ z_\nu&=z_{\nu-1}+t_\nu\zeta_\nu \end{aligned}$$

Die Richtungskosinus der Flächennormalen im Punkte (x_ν, y_ν, z_ν) sind

$$\cos a_\nu=\frac{x_\nu-k_\nu}{r_\nu}$$

$$\cos b_\nu=\frac{y_\nu}{r_\nu}$$

$$\cos c_\nu=0.$$

Multipliziert man die beiden ersten Gleichungen (21) mit den jeweilige Koeffizienten von t und addiert, so wird

$$x_\nu \xi_\nu + y_\nu \eta_\nu = x_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + t_\nu(\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)$$

oder

$$(x_\nu - k_\nu)\xi_\nu + y_\nu \eta_\nu = x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu + t_\nu(\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)$$

und unter Benutzung von (15) und (20)

$$n_\nu r_\nu \cos\omega_\nu = \sqrt{(x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu)^2 - (\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)(x^{*2}_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} - r^2_\nu)}$$

Da

$$\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2 = n_\nu^2$$

ist, wird

$$\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 = n_\nu^2(1 - \cos^2\gamma_\nu) = n_\nu^2 \sin^2\gamma_\nu .$$

Setzt man unter Berücksichtigung dieser Beziehung

$$x^{*2}_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} = n_\nu^2 R^2_{\nu-1}$$

$$x^*_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu = n_\nu^2 R_{\nu-1}\sin\gamma_\nu \cos\sigma_{\nu-1},$$

so wird

$$n_\nu r_\nu \cos\omega_\nu = \sqrt{n_\nu^4 R^2_{\nu-1}\sin^2\gamma_\nu \cos^2\sigma_{\nu-1} - n_\nu^4 \sin^2\gamma_\nu R^2_{\nu-1} + r_\nu n_\nu^2 \sin^2\gamma_\nu}$$

$$\cos\omega_\nu = \sin\gamma_\nu \sqrt{1 - \left(\frac{n_\nu R_{\nu-1}\sin\sigma_{\nu-1}}{r_\nu}\right)^2}$$

oder, wenn noch

$$\frac{n_\nu R_{\nu-1}\sin\sigma_{\nu-1}}{r_\nu} = \sin\vartheta_{\nu-1}$$

gesetzt wird,

$$\cos\omega_\nu = \sin\gamma_\nu \cos\vartheta_{\nu-1}$$

$$t_\nu = n_\nu r_\nu \cos\vartheta_{\nu-1} - n_\nu R_{\nu-1}\cos\sigma_{\nu-1}.$$

Von hier an geschieht die Berechnung der Größen $\omega'_\nu, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \xi_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}, \zeta_{\nu+1}$ unter Benutzung der Gleichungen (21) nach den allgemeinen Formeln. Die Vorzeichenbestimmung von $\cos\omega_\nu$ ist dieselbe, wie bei den Kugelflächen.

Ist die vorhergehende $(\nu-1)^{\text{te}}$ Fläche eine Zylinderfläche, deren Achse die Z-Achse ist, so ergeben die Beziehungen

$$x_{\nu-1}\xi_\nu + y_{\nu-1}\eta_\nu = n_\nu r_{\nu-1}\cos\omega'_{\nu-1}$$

$$x^2_{\nu-1} + y^2_{\nu-1} = r^2_{\nu-1}$$

für die Berechnung von $R_{\nu-1}$ und $\sigma_{\nu-1}$:

$$n_\nu^2 R^2_{\nu-1} = (r_{\nu-1} - k_\nu)^2 + 2k_\nu(r_\nu - x_\nu)$$

$$\cos\sigma_{\nu-1} = \frac{n_\nu r_{\nu-1}\cos\omega'_{\nu-1} - \xi_\nu k_\nu}{n_\nu^2 R_{\nu-1}\sin\gamma_\nu}.$$

Hat die Achse der ν^{ten} Zylinderfläche mit der Y-Achse dieselbe Richtung, so erhält man durch zyklische Vertauschung das Formelsystem:

$$R_{\nu-1} = \frac{1}{n_\nu}\sqrt{x^{*2}_{\nu-1} + z^2_{\nu-1}}$$

$$x^*_{\nu-1}\xi_\nu + z_{\nu-1}\xi_\nu = n_\nu^2 \sin\beta_\nu R_{\nu-1}\cos\sigma_{\nu-1}\,; \quad \left[\cos\beta_\nu = \frac{\eta_\nu}{n_\nu}\right]$$

$$\cos\sigma_{\nu-1} = \frac{x^*_{\nu-1}\xi_\nu + z_{\nu-1}\xi_\nu}{n_\nu^2 R_{\nu-1}\sin\beta_\nu}$$

$$\sin\vartheta_{\nu-1} = \frac{n_\nu R_{\nu-1}\sin\sigma_{\nu-1}}{r_\nu}$$

$$\cos\omega_\nu = \sin\beta_\nu\cos\vartheta_{\nu-1}$$

$$t_\nu = n_\nu r_\nu\cos\vartheta_{\nu-1} - n_\nu R_{\nu-1}\cos\sigma_{\nu-1}$$

$$x_\nu = x_{\nu-1} + t_\nu\xi_\nu$$

$$y_\nu = y_{\nu-1} + t_\nu\eta_\nu$$

$$z_\nu = z_{\nu-1} + t_\nu\zeta_\nu$$

$$\sin\omega'_\nu = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}\sin\omega_\nu$$

$$\frac{\tau_\nu}{r_\nu} = \frac{n_{\nu+1}\cos\omega'_\nu - n_\nu\cos\omega_\nu}{r_\nu}$$

$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu + \frac{\tau_\nu}{r_\nu}(x_\nu - k_\nu)$$

$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu\,; \quad \left[\cos\beta_{\nu+1} = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}\cos\beta_\nu\right]$$

$$\zeta_{\nu+1} = \zeta_\nu + \frac{\tau_\nu}{r_\nu}z_\nu$$

Indem man wieder statt x_ν den Wert $(x_\nu - k_\nu)$ als Abszisse auffaßt, verlegt man den Koordinatenanfangspunkt in den Schnittpunkt der ν^{ten} Zylinderachse mit der X-Achse des Koordinatensystems.

III. Brechung an speziellen Flächen bei speziellen Anfangskonstanten des Lichtstrahls.

a) Strahlen in der „Meridianebene“ mit endlicher Neigung gegen die Achse.

Ist $z_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$, liegt also der eintretende Strahl in der $X\,Y$-Ebene, so wird in jedem der unter a), b), c) des vorigen Abschnittes betrachteten Fälle auch $\cos c_1 = 0$. Da τ_ν niemals unendlich groß werden kann, folgt

$$\zeta_2 = \zeta_1 + \tau_1 \cdot 0 = \zeta_1 = 0\,.$$

Auch t_ν muß stets endlich angenommen werden, was sich am einfachsten aus der geometrischen Interpretation dieser Größe ergibt. Es wird also auch

$$z_2 = z_1 + t_1 \cdot 0 = z_1 = 0.$$

Der erste gebrochene Strahl liegt daher auch in der XY-Ebene und ebenso alle folgenden, so daß die Koordinaten z unter den hier gemachten Voraussetzungen vollständig vernachlässigt werden können.

1. Die brechende Fläche ist eine zur X-Achse senkrechte Ebene.

Die Stelle, an welcher der ν^{te} eintretende Strahl mit den Gleichungen

$$x = k_\nu + t\xi_\nu$$

$$y = y_\nu + t\eta_\nu$$

die X-Achse schneidet, ergibt sich durch Nullsetzen von y. Bezeichnen wir die Entfernung dieser Stelle vom Koordinatenanfangspunkt mit $(p_\nu + k_\nu)$, so ist danach

$$p_\nu + k_\nu = k_\nu - \xi_\nu \frac{y_\nu}{\eta_\nu}$$

Infolge des Bestehens der Gleichungen

$$\xi_\nu = n_\nu \cdot \cos \alpha_\nu$$

$$\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 = n_\nu^2$$

ist

$$\eta_\nu = n_\nu \sin \alpha_\nu$$

und folglich

$$p_\nu = y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu$$

Für den gebrochenen Strahl gilt entsprechend

$$p'_\nu = y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1},$$

woraus sich durch Elimination von y_ν ergibt

$$p'_\nu = \frac{p_\nu}{\operatorname{cotg} \alpha_\nu} \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}.$$

Da ferner nach Früherem

$$\omega_\nu = \alpha_\nu$$

$$\omega'_\nu = \alpha_{\nu+1}$$

ist, so hat man noch zur Berechnung von $\alpha_{\nu+1}$ die Gleichung

$$\sin \alpha_{\nu+1} = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \sin \alpha_\nu.$$

Zur Berechnung von $p_{\nu+1}$ dient die Gleichung

$$p'_\nu + k_\nu = p_{\nu+1} + k_{\nu+1}$$
$$p_{\nu+1} = p'_\nu + k_\nu - k_{\nu+1}.$$

Denkt man sich wieder nachträglich das Koordinatenkreuz um die Strecke k_ν auf der X-Achse verschoben, so gilt für die neue Lage des Koordinatensystems

$$p_{\nu+1} = p'_\nu - k_{\nu+1},$$

wo nun $k_{\nu+1}$ den Abstand der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ von der ν^{ten} brechenden Ebene angibt.

2. Brechung an Kugelflächen in der „Meridianebene".

Es sei p_ν die Entfernung des Schnittpunktes des ν^{ten} eintretenden Strahls mit der X-Achse von dem Schnittpunkt der ν^{ten} brechenden Kugelfläche mit der X-Achse.

Die Entfernung des Schnittpunktes der ν^{ten} Kugelfläche mit der X-Achse vom Koordinatenanfangspunkt ist $= k_\nu \pm r_\nu$. Die Entfernung des Schnittpunktes des Strahls mit der X-Achse vom Koordinatenanfangspunkt ist $= x_\nu - y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu$; folglich

$$p_\nu = x_\nu - y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu - k_\nu \pm r_\nu$$
$$= -q_\nu \pm r_\nu,$$

wobei

$$q_\nu = -x_\nu + k_\nu + y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu = -x^*_\nu + y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu$$

ist.

Nun ist nach (1)

$$\sin^2 \omega_\nu = (\cos \alpha_\nu \cos b_\nu - \cos \beta_\nu \cos a_\nu)^2 \tag{22}$$

$$= \left(\cos \alpha_\nu \frac{y_\nu}{r_\nu} - \sin \alpha_\nu \frac{x^*_\nu}{r_\nu}\right)^2 \tag{23}$$

$$= \left(\frac{q_\nu \sin \alpha_\nu}{r_\nu}\right)^2 \tag{24}$$

Um die aus (24) folgende Zweideutigkeit von $\sin \omega_\nu$ zu beseitigen, setzen wir allgemein

$$\sin \omega_\nu = \frac{q_\nu \sin \alpha_\nu}{r_\nu}, \tag{25}$$

und analog

$$\sin \omega'_\nu = \frac{q'_\nu \sin \alpha_{\nu+1}}{r_\nu}, \tag{25a}$$

wobei nun r_ν *eine algebraische Größe ist, die positives oder negatives Vorzeichen haben kann.* Die beiden verschiedenen Werte von r_ν liefern dann die den beiden Schnittpunkten des Strahls mit der Kugelfläche entsprechenden Werte von $\sin \omega_\nu$. Da eine Bestimmung darüber, in

welcher Richtung ω_ν gemessen werden soll, noch nicht getroffen ist, so kann noch festgesetzt werden, daß r_ν positiv zu rechnen ist, wenn in dem betrachteten Schnittpunkte die Kugelfläche der Lichtrichtung die konvexe Seite zukehrt, und im entgegengesetzten Falle negativ. Wir setzen ferner allgemein

$$p_\nu = r_\nu - q_\nu,$$

wo wieder r_ν als algebraische Größe anzusehen ist und als solche das oben fixierte Vorzeichen hat. Dadurch wird p_ν auf einen bestimmten der beiden Schnittpunkte unserer Kugelfläche mit der X-Achse bezogen, und zwar auf denjenigen, der durch das Vorzeichen des Radius bestimmt ist, wenn wir die Projektion des eintretenden Strahls auf die X-Achse als eintretenden Strahl auffassen. In dem praktisch allein vorkommenden Falle, daß

$$+ 90^0 > \alpha_\nu > - 90^0$$

ist, wird diese Projektion stets die Richtung der X-Achse haben.

Da

$$\cos b_\nu = \sin a_\nu,$$

wird nach (22) und (25)

$$\sin \omega_\nu = \sin a_\nu \cos \alpha_\nu - \cos a_\nu \sin \alpha_\nu = \sin (a_\nu - \alpha_\nu),$$

woraus entweder

$$a_\nu = \alpha_\nu + \omega_\nu$$

oder

$$a_\nu = 180^0 - \omega_\nu + \alpha_\nu$$

folgt. Die Berücksichtigung der bereits getroffenen Vorzeichenbestimmungen ergibt, daß nur die zweite der beiden Gleichungen zulässig ist. Analog gilt

$$a_\nu = 180^0 - \omega'_\nu + \alpha_{\nu+1},$$

und durch Elimination von a_ν erhält man

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \omega_\nu + \omega'_\nu.$$

Somit lautet nunmehr das System der Rekursionsformeln:

$$\sin \omega_\nu = \frac{q_\nu}{r_\nu} \sin \alpha_\nu$$

$$\sin \omega'_\nu = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \sin \omega_\nu$$

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \omega_\nu + \omega'_\nu$$

$$q'_\nu = \frac{r_\nu \sin \omega'_\nu}{\sin \alpha_{\nu+1}}.$$

Die letzte Gleichung folgt durch Isolierung von q'_ν aus (25a). Für den Übergang zum folgenden $q_{\nu+1}$ ergibt sich

(26) $$q_{\nu+1} = q'_\nu + k_{\nu+1}.$$

Hierbei ist $k_{\nu+1}$ die Entfernung der Mittelpunkte der ν^{ten} und $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Kugelfläche. Hat man statt dieser Konstanten die Entfernung der beiden für p_ν' und $p_{\nu+1}$ in Betracht kommenden Schnittpunkte der Kugelflächen mit der X-Achse, welche d_ν sein möge, so ist

$$p_{\nu+1} = p_\nu' - d_\nu$$

$$-q_{\nu+1} + r_{\nu+1} = -q_\nu' + r_\nu - d_\nu$$

und unter Berücksichtigung von (26)

$$k_{\nu+1} = r_{\nu+1} - r_\nu + d_\nu.$$

Auch hier sind natürlich $r_{\nu+1}$ und r_ν wieder algebraische Größen.

b) Null- und Zentralstrahlen.

Macht man zum Zwecke der Erzielung eines Grenzwertes in IIIa die Fiktion, daß α_ν und y_ν unendlich klein seien, so wird ebenso ω_ν, ω_ν' und $\alpha_{\nu+1}$ unendlich klein sein, und man kann durchweg statt der Sinus die Winkel selbst (im natürlichen Winkelmaß) setzen. Die Formeln unter IIIa 2 werden dann

$$\omega_\nu = \frac{q_\nu}{r_\nu}\,\alpha_\nu$$

$$\omega_\nu' = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}\,\omega_\nu$$

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \omega_\nu + \omega_\nu'$$

$$q_\nu' = \frac{r_\nu \omega_\nu'}{\alpha_{\nu+1}}$$

$$q_{\nu+1} = q_\nu' + k_{\nu+1}.$$

Strahlen dieser Art sollen im folgenden Nullstrahlen genannt werden. Ist noch $q_1 = \infty$, so mögen sie Zentralstrahlen heißen. — Die obigen Formeln können praktisch in der Weise benutzt werden, daß man $\alpha_1 = \varepsilon \cdot \alpha_1^*$ setzt, wobei α_1^* eine beliebige endliche Größe bedeutet. Der unendlich kleine Faktor ε, der sich als Koeffizient bei allen folgenden Winkeln zeigt, während er sich bei den Strecken forthebt, wird dann bei der Berechnung fortgelassen, so daß man nur mit endlichen Größen zu tun hat. Diese Art der Berechnung hat vor anderen den Vorzug, daß sie vollständig analog der der Strahlen mit endlicher Neigung gegen die Achse ist und ferner wegen des Vorkommens der α eine leichte Feststellung der sammelnden oder zerstreuenden Wirkung jeder brechenden Fläche gestattet. Eine Vereinfachung, die den zweiten Vorteil festhält, ergibt sich durch folgende Überlegung: Führt man für q_ν und q_ν' wieder die Ausdrücke $r_\nu - p_\nu$ und $r_\nu - p_\nu'$ ein und setzt $p_\nu \cdot \alpha_\nu = h_\nu$, so wird

$$\omega_\nu = \frac{r_\nu - p_\nu}{r_\nu}\alpha_\nu = \alpha_\nu - \frac{h_\nu}{r_\nu}$$

$$\omega'_\nu = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}\alpha_\nu - \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}\frac{h_\nu}{r_\nu}$$

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}\alpha_\nu + \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \frac{h_\nu}{r_\nu}$$

$$p'_\nu = r_\nu - \frac{r_\nu \omega'_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{r_\nu(\alpha_{\nu+1} - \omega'_\nu)}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{r_\nu(\alpha_\nu - \omega_\nu)}{\alpha_{\nu+1}}$$

$$= \frac{h_\nu}{\alpha_{\nu+1}}$$

$$p_{\nu+1} = p'_\nu - d_\nu$$

$$h_{\nu+1} = p_{\nu+1}\alpha_{\nu+1} = h_\nu - d_\nu\alpha_{\nu+1}.$$

Das ergibt die Rekursionsformeln:

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \alpha_\nu + \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \frac{h_\nu}{r_\nu}$$

$$h_{\nu+1} = h_\nu - d_\nu\alpha_{\nu+1}$$

wobei zwischen den h und p die Gleichungen bestehen:

$$h_\nu = p_\nu \cdot \alpha_\nu = p'_\nu\alpha_{\nu+1}.$$

c) **Meridionalstrahlen.**

Zur Feststellung eines weiteren Grenzwertes ist es häufig von Nutzen, die Schnittpunkte eines Strahls mit einem unendlich benachbarten Strahl vor und nach der Brechung zu bestimmen. Liegen beide Strahlen in der XY-Ebene, so nennt man diese Bestimmung in nicht ganz logischer aber kurzer Bezeichnung die Berechnung der Meridionalstrahlen. Die Formeln hierfür lassen sich am einfachsten durch Differentiation der Formeln unter IIIa 1 resp. IIIa 2 herleiten, wobei für IIIa 2 angenommen wird, daß der unendlich benachbarte Strahl vor der Brechung die Konstanten $q_\nu + dq_\nu$ und $\alpha_\nu + d\alpha_\nu$ hat. Voraussetzung der Anwendbarkeit der so erhaltenen Formeln ist, daß der Strahl, dessen Schnittpunkte mit dem unendlich benachbarten festgestellt werden sollen, der Hauptstrahl, bereits durchgerechnet ist.

Die Differentiation der Formeln unter IIIa 2 ergibt nun:

$$d\omega_\nu \operatorname{cotg} \omega_\nu = \frac{dq_\nu}{q_\nu} + d\alpha_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu$$

$$d\omega'_\nu \operatorname{cotg} \omega'_\nu = d\omega_\nu \operatorname{cotg} \omega_\nu$$

$$d\alpha_{\nu+1} = d\alpha_\nu - d\omega_\nu + d\omega'_\nu$$

$$q'_\nu \frac{dq'_\nu}{q'_{\nu+1}} = d\omega'_\nu \operatorname{cotg} \omega'_\nu - d\alpha_{\nu+1} \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}$$

$$\frac{dq_{\nu+1}}{q_{\nu+1}} = \frac{dq'_\nu}{q_{\nu+1}} = \frac{dq'_\nu}{q'_\nu} \cdot \frac{q'_\nu}{q_{\nu+1}}.$$

Setzt man

$$\frac{d\omega_\nu}{d\alpha_\nu} \operatorname{cotg} \omega_\nu = \frac{(m_\nu + k_\nu) \operatorname{cotg} \alpha_\nu}{q_\nu},$$

so ist

$$m_\nu = \frac{dq_\nu}{d\alpha_\nu} \operatorname{tg} \alpha_\nu + q'_{\nu-1}.$$

Ferner ist

$$\frac{d\alpha_{\nu+1}}{d\alpha_\nu} = 1 + \frac{(m_\nu + k_\nu) \operatorname{cotg} \alpha_\nu}{q_\nu} (\operatorname{tg} \omega'_\nu - \operatorname{tg} \omega_\nu)$$

$$dq_{\nu+1} = dq'_\nu = \frac{q'_\nu}{q_\nu} (m_\nu + k_\nu) \operatorname{cotg} \alpha_\nu d\alpha_\nu - q'_\nu d\alpha_{\nu+1} \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}$$

$$\frac{dq_{\nu+1}}{d\alpha_{\nu+1}} \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} = \frac{q'_\nu}{q_\nu} (m_\nu + k_\nu) \operatorname{cotg} \alpha_\nu \cdot \frac{d\alpha_\nu}{d\alpha_{\nu+1}} \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} - q'_\nu$$

$$m_{\nu+1} = \frac{q'_\nu}{q_\nu} (m_\nu + k_\nu) \operatorname{cotg} \alpha_\nu \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} : \left[1 + \frac{(m_\nu + k_\nu) \operatorname{cotg} \alpha_\nu}{q_\nu} (\operatorname{tg} \omega'_\nu - \operatorname{tg} \omega_\nu)\right]$$

$$= q'_\nu \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} : \left(\frac{q_\nu \operatorname{tg} \alpha_\nu}{m_\nu + k_\nu} + \operatorname{tg} \omega'_\nu - \operatorname{tg} \omega_\nu\right).$$

Um den Schnittpunkt der beiden unendlich benachbarten Strahlen zu bestimmen, rechnen wir in dem von diesen Strahlen und der X-Achse als Grundlinie gebildeten Dreieck die Höhe Y_ν aus. Die Grundseite ist gleich dq_ν, der ihr anliegende Winkel gleich α_ν und der Winkel an der Spitze gleich $d\alpha_\nu$. Man erhält

$$Y_\nu = \frac{dq_\nu}{d\alpha_\nu} \sin^2 \alpha_\nu.$$

Da

$$\frac{dq_\nu}{d\alpha_\nu} \operatorname{tg} \alpha_\nu = m_\nu - q'_{\nu-1},$$

wird schließlich

$$Y_\nu = (m_\nu - q'_{\nu-1}) \sin \alpha_\nu \cos \alpha_\nu.$$

Es soll noch die Änderung dieser Formeln berechnet werden für den Fall IIIa 1, daß der ν^{te} Radius unendlich groß, die ν^{te} brechende Fläche also eine Planfläche ist. Durch Differentiation des Formelsystems für IIIa 1 erhält man:

$$\frac{dp'_\nu}{p'_\nu} = \frac{dp_\nu}{p_\nu} + \frac{d \operatorname{tg} \alpha_\nu}{\operatorname{tg} \alpha_\nu} - \frac{d \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1}}{\operatorname{tg} \alpha_{\nu+1}}$$

$$= \frac{dp_\nu}{p_\nu} + \frac{d\alpha_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu}{\cos^2 \alpha_\nu} - \frac{d\alpha_{\nu+1} \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}}{\cos^2 \alpha_{\nu+1}}.$$

Unter Berücksichtigung des zweiten Differentiationsresultates

$$d\alpha_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu = d\alpha_{\nu+1} \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}$$

wird hieraus

$$\frac{dp'_\nu}{p'_\nu} = \frac{dp_\nu}{p_\nu} + d\alpha_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha_\nu} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_{\nu+1}} \right)$$

$$= \frac{dp_\nu}{p_\nu} + d\alpha_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu (\operatorname{tg}^2 \alpha_\nu - \operatorname{tg}^2 \alpha_{\nu+1})$$

$$\frac{dp_{\nu+1}}{d\alpha_{\nu+1}} \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} = \frac{p'_\nu}{p_\nu} \frac{dp_\nu}{d\alpha_\nu} \operatorname{tg} \alpha_\nu + p'_\nu (\operatorname{tg}^2 \alpha_\nu - \operatorname{tg}^2 \alpha_{\nu+1}).$$

Bezeichnet man wieder mit k_ν die Strecke, um welche das Koordinatensystem beim Übergang von der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ zur ν^{ten} Fläche verschoben wird, und nimmt für die Planfläche deren Durchstoßungspunkt mit der X-Achse als Koordinatenanfang, so wird $p_\nu = -k_\nu - q'_{\nu-1}$ und $q_{\nu+1} = k_{\nu+1} - p'_\nu$. Dann ist

$$m_{\nu+1} + k_{\nu+1} = \frac{dq_{\nu+1}}{d\alpha_{\nu+1}} \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} + k_{\nu+1} - p'_\nu$$

$$m_{\nu+1} = + \frac{p'_\nu}{p_\nu} (m_\nu - q'_{\nu-1}) - p'_\nu (\operatorname{tg}^2 \alpha_\nu - \operatorname{tg}^2 \alpha_{\nu+1}).$$

d) Grenzwert für Strahlen im Sagittalschnitt, gebrochen an Kugelflächen.

Ein Strahl in der XY-Ebene, der Hauptstrahl, gehe durch den Punkt $(X_\nu, Y_\nu, 0)$ und schneide die ν^{te} Kugelfläche in $(x_\nu, y_\nu, 0)$. Ein zweiter Strahl ist dem Hauptstrahl unendlich benachbart, derart daß er ebenfalls durch $(X_\nu, Y_\nu, 0)$, außerdem aber durch (x_ν, y_ν, dz_ν) geht. Er bildet mit dem Einfallslot die durch $(X_\nu, Y_\nu, 0)$, (x_ν, y_ν, dz_ν) und $(0, 0, 0)$ bestimmte Ebene, in der er auch nach der Brechung verbleiben muß. Die Gleichung der Ebene ist

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ X_\nu, & Y_\nu, & 0 \\ x_\nu, & y_\nu, & dz_\nu \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x Y_\nu dz_\nu - y X_\nu dz_\nu + z(X_\nu y_\nu - Y_\nu x_\nu) = 0,$$

Die Schnittgerade dieser Ebene mit der XY-Ebene hat danach die Gleichungen

$$x Y_\nu - y X_\nu = 0$$

$$z = 0,$$

woraus folgt, daß die Gerade durch den Punkt $(X_\nu, Y_\nu, 0)$ und den Koordinatenanfangspunkt geht. Da der Schnittpunkt der beiden unendlich benachbarten Strahlen nach der Brechung auf dieser Geraden

sowohl wie auf dem Hauptstrahl liegen muß, so fällt er zusammen mit der Stelle, wo der gebrochene Hauptstrahl die Gerade schneidet.

Der gebrochene Hauptstrahl möge nun wieder durch die Koordinaten q'_ν und $\alpha_{\nu+1}$ bestimmt sein, so daß seine Gleichung lautet:

$$-y = x \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} - q'_\nu \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1}.$$

In Verbindung mit

$$x Y_\nu - y X_\nu = 0$$

erhält man die Werte der Wurzeln X'_ν und $Y_{\nu+1}$:

$$X'_\nu = -\frac{q'_\nu X_\nu}{Y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1} + X_\nu}$$

$$Y_{\nu+1} = -\frac{q'_\nu Y_\nu}{Y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1} + X_\nu}.$$

Da X_ν und Y_ν auf dem eintretenden Strahl liegen, besteht noch die Gleichung

$$X_\nu - Y_\nu \operatorname{cotg} \alpha_\nu = q_\nu,$$

woraus in Verbindung mit der vorigen Gleichung

$$Y_{\nu+1} = \frac{q'_\nu}{\frac{q_\nu}{Y_\nu} + \operatorname{cotg} \alpha_\nu - \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}}$$

oder

$$\frac{q'_\nu}{Y_{\nu+1}} = \frac{q_\nu}{Y_\nu} + \operatorname{cotg} \alpha_\nu - \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}.$$

[Die Größe $\frac{q_\nu}{Y_\nu} + \operatorname{cotg} \alpha_\nu$ ist also eine optische Invariante.]

Durch Einsetzen der Werte von q_ν und q'_ν erhält man

$$\frac{r_\nu n_\nu \sin \omega_\nu}{n_{\nu+1} \sin \alpha_{\nu+1} Y_{\nu+1}} = \frac{r_\nu n_\nu \sin \omega_\nu}{n_\nu \sin \alpha_\nu Y_\nu} + \operatorname{cotg} \alpha_\nu - \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1},$$

und wenn diese Gleichung noch durch $r_\nu n_\nu \sin \omega_\nu$ dividiert wird

$$\frac{1}{n_{\nu+1} \sin \alpha_{\nu+1} Y_{\nu+1}} = \frac{1}{n_\nu \sin \alpha_\nu Y_\nu} + \frac{\operatorname{cotg} \alpha_\nu - \operatorname{cotg} \alpha_{\nu+1}}{n_\nu r_\nu \sin \omega_\nu}$$

$$\frac{1}{n_{\nu+1} \sin \alpha_{\nu+1} Y_{\nu+1}} - \frac{1}{n_\nu \sin \alpha_\nu Y_\nu} = \frac{\sin(\omega'_\nu - \omega_\nu)}{n_\nu r_\nu \sin \omega_\nu \sin \alpha_\nu \sin \alpha_{\nu+1}}.$$

Durch Summation erhält man

$$\frac{1}{n_{\nu+1} \sin \alpha_{\nu+1} Y_{\nu+1}} = \frac{1}{n_1 \sin \alpha_1 Y_1} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \frac{\sin(\omega'_\varkappa - \omega_\varkappa)}{n_\varkappa r_\varkappa \sin \omega_\varkappa \sin \alpha_\varkappa \sin \alpha_{\varkappa+1}},$$

Die praktische Durchrechnung.

Als Beispiel für die Anwendung der entwickelten Formeln ist das der Berechnung von Dr. R. Steinheil im 17. Jahrgang der „Zeitschrift für Instrumentenkunde", S. 338 ff. zugrunde gelegte Fernrohrobjektiv benutzt. Zu dieser Wahl entschloß sich Verfasser, weil die angegebene Veröffentlichung die einzige ihm bekannte ist, in welcher auch die Berechnung von achsenwindschiefen Strahlen (noch dazu mit großer Genauigkeit: 7stellige Logarithmen, Tausendstel Sekunde) durchgeführt wurde. Der Vergleich mit den Steinheilschen Resultaten fällt für die hier angewandten Formeln recht günstig aus.

Die Konstanten des Systems sind folgende:

		$n_1 = 1$
$r_1 = +\ 420$		
	$d_1 = 2$	$n_2 = 1{,}614\,400$
$r_2 = +\ 181{,}995$		
	$d_2 = 0{,}01$	$n_3 = 1$
$r_3 = +\ 178{,}710$		
	$d_3 = 5$	$n_4 = 1{,}518\,564$
$r_4 = -\ 40\,133{,}8$		
		$n_5 = 1$

Diese Daten sind für alle folgenden Beispiele beibehalten. Die Reihenfolge der verschiedenen Strahlenarten ist dabei so gewählt, wie sie sich dem Praktiker in der Mehrzahl der Fälle von selbst bietet.

I. Zentralstrahl.

Formel:

$$h_1 = p_1 \cdot \alpha_1$$

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \alpha_\nu + \frac{h_\nu}{r_\nu} \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_{\nu+1}}$$

$$h_{\nu+1} = h_\nu - d_\nu \alpha_{\nu+1}$$

$$p'_\nu = \frac{h_\nu}{\alpha_{\nu+1}}$$

Im Falle $p_1 = \infty$, $\alpha_1 = 0$ wird h_1 zweckmäßig gleich der Brennweite gewählt, falls diese vorgeschrieben oder bereits bekannt ist.

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$\log \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}$		0,2080111 +	9,8185669 +	0,1814331 +
$\log \alpha_\nu$		9,9561420 +	0,2792888 −	9,8129585 +
$\log \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \alpha_\nu$		0,1641531 +	0,0978557 −	9,9943946 +

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$\log \frac{1}{r_\nu}$	7,3767507 +	7,7399406 +	7,7478511 +	5,3964898 −
$\log \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_{\nu+1}}$	9,5804401 +	9,7884512 −	9,5333693 +	9,7148024 −
$\log h_\nu$	2,9989512 +	2,9981634 +	2,9981717 +	2,9967519 +
$\log\left(\frac{h_\nu}{r_\nu}\frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_{\nu+1}}\right)$	9,9561420 +	0,5265552 −	0,2793921 +	8,1080441 +
$\frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \alpha_\nu$		+ 1,459328	− 1,252724	+ 0,9871761
$\frac{h_\nu}{r_\nu}\frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_{\nu+1}}$		− 3,361671	+ 1,902796	+ 0,0128246
$\alpha_{\nu+1}$		− 1,902343	+ 0,650072	+ 1,0000007
$\log d_\nu$	0,3010300 +	8,0000000 +	0,6989700 +	2,9967519
$\log \alpha_{\nu+1}$	9,9561420 +	0,2792888 −	9,8129615 +	0,0000003
$\log d_\nu \alpha_{\nu+1}$	0,2571720 +	8,2792888 −	0,5119315 +	2,9967516

$$
\begin{aligned}
997{,}588 &= c_1 \\
-\ 1{,}807\,890 &= d_1\alpha_2 \\
\hline
+\ 995{,}780\,110 &= c_2 \\
+\ 0{,}019\,023 &= d_2\alpha_3 \\
\hline
+\ 995{,}799\,133 &= c_3 \\
-\ 3{,}250\,360 &= d_3\alpha_4 \\
\hline
+\ 992{,}548\,773 &= c_4
\end{aligned}
$$

$$p_4' = 992{,}5482$$

Da $\alpha_1 = 0$ ist, fällt in der Spalte $\nu = 1$ die Berechnung von $\alpha_1 \frac{n_1}{n_2}$ fort. Infolgedessen braucht auch der Numerus von α_2 nicht aufgeschlagen zu werden. — Die Zeichen hinter den Logarithmen beziehen sich auf die zugehörigen Numeri. — Die Berechnung der Größen h geschieht am zweckmäßigsten in der untenstehenden Nebenrechnung, wobei vermieden wird, daß die Werte von h mehrmals hingeschrieben werden. — In der letzten Spalte ($\nu = 4$) beziehen sich die drei letzten Logarithmen nicht mehr auf d und α. Sie sind vielmehr der Reihe nach $\log h_4$, $\log \alpha_5$ und $\log \frac{h_4}{\alpha_5} = \log p_4'$. Wäre die aus der Steinheilschen Berechnung übernommene Brennweite $h_1 = 997{,}588$ genau gleich der hier errechneten, so müßte wegen des Zusammenhanges $\frac{h_1}{f} = \alpha_5$ (f = Brennweite) $\alpha_5 = 1$ sein, und die Berechnung von p_4' würde sich erübrigen.

Es wäre dann $h_4 = p_4'$. Dieser Fall tritt immer ein, wenn mit Hilfe des letzten Radius eine bestimmte Brennweite $f = h_1$ eingehalten werden soll. Dann setzt man, nachdem man bis zur Berechnung von h_4 und $\frac{n_4}{n_5} \cdot \alpha_4$ gelangt ist, $\alpha_5 = 1$ und bestimmt $\frac{h_4}{r_4} \frac{n_5 - n_4}{n_5} = 1 - \frac{n_4}{n_5}\alpha_4$. Unter Benutzung desselben Schemas wie für die andern Brechungen erhält man durch einfaches Rückwärtsrechnen den Wert von $\log \frac{1}{r_4}$.

II. Randstrahl.

$$\left.\begin{aligned} \sin \omega_\nu &= \frac{q_\nu}{r_\nu} \sin \alpha_\nu \\ \sin \omega_\nu' &= \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \sin \omega_\nu \\ \alpha_{\nu+1} &= \alpha_\nu - \omega_\nu + \omega_\nu' \\ q_\nu' &= \frac{r_\nu \sin \omega_\nu'}{\sin \alpha_{\nu+1}} \\ q_{\nu+1} &= q_\nu' + k_{\nu+1} \end{aligned}\right| \begin{aligned} k_{\nu+1} &= r_{\nu+1} - r_\nu + d_\nu \\ p_\nu &= r_\nu - q_\nu \\ p_\nu' &= r_\nu - q_\nu' \end{aligned}$$

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
k_ν		— 236,0050	— 3,2750	— 40307,51
$q_{\nu-1}'$		— 682,2850	+ 685,6727	— 1353,49
q_ν		— 918,29	+ 682,3977	— 41660,00
$\log q_\nu$		2,9629799 —	2,8340375 +	4,6197296 —
$\log \sin \alpha_\nu$	1,5185139 —	8,4765370 +	8,8114112 —	8,3325614 +
$\log \frac{1}{r_\nu}$	7,3767507 +	7,7399406 +	7,7478511 +	5,3964898 —
$\log \sin \omega_\nu$	8,8952646 —	9,1794575 —	9,3932998 —	8,3487808 +
$\log \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}$	9,7919889 +	0,2080111 +	9,8185669 +	0,1814331 +
$\log \sin \omega_\nu'$	8,6872535 —	9,3874686 —	9,2118667 —	8,5302139 +
$\log r_\nu$	2,6232439 +	2,2600594 +	2,2521489 +	4,6035102 —
$\log (1 : \sin \alpha_{\nu+1})$	1,5234630 +	1,1885888 —	1,6674386 +	1,4803947 +
$\log q_\nu'$	2,8339658 —	2,8361168 +	3,1314542 —	4,6141188 —

$$\begin{aligned} + 4^0\,30'\,23{,}24'' &= -\omega_1 \\ - 2^0\,47'\,22{,}69'' &= \omega_1' \\ + 1^0\,43'\,\ 0{,}55'' &= \omega_1' - \omega_1 = \alpha_2 \\ + 8^0\,41'\,40{,}46'' &= -\omega_2 \\ + 10^0\,24'\,41{,}01'' &= \alpha_2 - \omega_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\ 14^0\ 7'\ 31{,}29'' &= \omega_2' \\
-\ 3^0\ 42'\ 50{,}28'' &= \alpha_3 \\
+\ 14^0\ 19'\ 13{,}25'' &= -\ \omega_3 \\
+\ 10^0\ 36'\ 22{,}97'' &= \alpha_3 - \omega_3 \\
-\ 9^0\ 22'\ 26{,}68'' &= \omega_3' \\
+\ 1^0\ 13'\ 56{,}29'' &= \alpha_4 \\
-\ 1^0\ 16'\ 45{,}13'' &= -\ \omega_4 \\
-\ 0^0\ 2'\ 48{,}84'' &= \alpha_4 - \omega_4 \\
+\ 1^0\ 56'\ 33{,}95'' &= \omega_4' \\
+\ 1^0\ 53'\ 45{,}11'' &= \alpha_5 \\
-\ 40133{,}800 &= r_4 \\
+\ 41126{,}22 &= -\ q_4' \\
992{,}42 &= p_4'
\end{aligned}
$$

Die Berechnung des Randstrahls, d. h. eines achsenparallel im Achsenabstand h (hier ist $h = 33$) eintretenden Strahls, ist als Beispiel gewählt für die Anwendung der Formeln derjenigen außerparaxialen Strahlen, die mit der Achse in einer Ebene liegen. Beim Randstrahl ist $q_1 = \infty$, $\alpha_1 = 0$; das Produkt $q_1 \cdot \sin \alpha_1$ hat jedoch als Grenzwert die Größe $(-h)$, die den Abstand von der Achse angibt. Daher wird in der ersten Spalte $\sin \omega_1 = -\frac{h}{r_1}$, so daß an der für den Logarithmus von $\sin \alpha_1$ bestimmten Stelle der Logarithmus von $(-h)$ steht. Die Berechnung der α ist wiederum in einer Nebenrechnung ausgeführt, um ein doppeltes Aufschreiben der Werte zu umgehen. Zum Schlusse ist noch p_4' nach der Formel $p_4' = r_4 - q_4'$ berechnet.

III. Meridionalbüschel.

Die Berechnung des Meridionalstrahls schließt sich an die Berechnung desjenigen Strahls an, für den die Schnittpunkte mit dem unendlich benachbarten festgestellt werden sollen. Dieser „Hauptstrahl" soll daher vorausgeschickt werden.

a) Hauptstrahl. $p_1 = 0$, $\alpha_1 = -\ 0^0\ 48'\ 0{,}00''$

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
k_ν		$-\ 236{,}0050$	$-\ 3{,}275$	$-\ 40307{,}51$
$q'_{\nu-1}$		$+\ 420$	$+\ 183{,}2284$	$+\ 180{,}605$
q_ν		$+\ 183{,}995$	$+\ 179{,}9534$	$-\ 40126{,}905$

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$\log q_\nu$	2,6232493 +	2,2648060 +	2,2551601 +	4,6034356 —
$\log \sin \alpha_\nu$	8,1449532 —	7,9369421 —	8,1467664 —	7,9637642 —
$\log \frac{1}{r_\nu}$	7,3767507 +	7,7399406 +	7,7478511 +	5,3964898 —
$\log \sin \omega_\nu$	8,1449532 —	7,9416887 —	8,1497776 —	7,9636896 —
$\log \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}$	9,7919889 +	0,2080111 +	9,8185669 +	0,1814331 +
$\log \sin \omega'_\nu$	7,9369421 —	8,1496998 —	7,9683445 —	8,1451227 —
$\log r_\nu$	2,6232493 +	2,2600594 +	2,2521489 +	4,6035102 —
$\log (1 : \sin \alpha_{\nu+1})$	2,0630579 +	1,8532336 —	2,0362358 —	1,8548282 —
$\log q'_\nu$	2,6232493 +	2,2629928 +	2,2567292 +	4,6034611 —

$$
\begin{aligned}
&- 0^0\,48'\;\;0{,}00'' = \alpha_1\\
&+ 0^0\,48'\;\;0{,}00'' = -\,\omega_1\\
&\quad 0^0 \qquad\qquad = \alpha_1 - \omega_1\\
&- 0^0\,29'\,43{,}91'' = \omega'_1\\
&- 0^0\,29'\,43{,}91'' = \alpha_2\\
&+ 0^0\,30'\;\;3{,}51'' = -\,\omega_2\\
&+ 0^0\;\;0'\,19{,}60'' = \alpha_2 - \omega_2\\
&- 0^0\,48'\,31{,}65'' = \omega'_2\\
&- 0^0\,48'\,12{,}05'' = \alpha_3\\
&+ 0^0\,48'\,32{,}17'' = -\,\omega_3\\
&+ 0^0\;\;0'\,20{,}12'' = \alpha_3 - \omega_3\\
&- 0^0\,31'\,57{,}68'' = \omega'_3\\
&- 0^0\,31'\,37{,}56'' = \alpha_4\\
&+ 0^0\,31'\,37{,}23'' = -\,\omega_4\\
&- 0^0\;\;0'\;\;0{,}33'' = \alpha_4 - \omega_4\\
&- 0^0\,48'\;\;1{,}12'' = \omega'_4\\
&- 0^0\,48'\;\;1{,}45'' = \alpha_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 40133{,}800 = r_4\\
&+ 40129{,}257 = -\,q'_4\\
&\quad - 4{,}543 = p'_4\\
&- 992{,}548 = p'_4 \text{ vom Zentralstrahl}\\
&- 997{,}091 = p'_4 - {}^z p'_4
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} 2{,}9987348 - &= \log\,(p_4' - {}^z p_4') \\ 8{,}1452142 - &= \log \operatorname{tg} \alpha_5 \\ \hline 1{,}1439490 + &= \log Y_H \end{aligned}$$

$$Y_H = + 13{,}92993.$$

In der ersten Spalte ($\nu = 1$) ist hier (wegen der speziellen Annahme $p_1 = 0$) $q_1 = r_1$, folglich $\sin \omega_1 = \sin \alpha_1$. Die Berechnung von q_1' ergibt ebenfalls den Wert r_1. Zum Schlusse ist wieder p_4' berechnet und darauf der Schnittpunkt des austretenden Strahls mit der Brennebene (durch die Entfernung Y_H von der Achse) bestimmt. Die Formel hierfür ist

$$Y_H = (p_4' - {}^z p_4') \operatorname{tg} \alpha_5$$

wobei ${}^z p_4'$ die bei der Berechnung des Zentralstrahls sich ergebende Größe p_4' ist.

b) Meridionalstrahl.

$$\left.\begin{aligned} l_\nu &= \frac{q_\nu \operatorname{tg} \alpha_\nu}{m_\nu + k_\nu} + \operatorname{tg} \omega_\nu' - \operatorname{tg} \omega_\nu \\ m_{\nu+1} &= \frac{q_\nu' \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1}}{l_\nu} \end{aligned}\right\} Y_{\nu+1} = (m_{\nu+1} - q_\nu') \sin \alpha_{\nu+1} \cos \alpha_{\nu+1}$$

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
k_ν		$-$ 236,0050	$-$ 3,2750	$-$ 40307,51
m_ν		$-$ 683,4861	$+$ 705,3579	$-$ 1352,95
$m_\nu + k_\nu$		$-$ 919,4911	$+$ 702,0829	$-$ 41660,46
$\log q_\nu$		2,2648060 $+$	2,2551601 $+$	4,6034356 $-$
$\log \operatorname{tg} \alpha_\nu$		7,9369584 $-$	8,1468091 $-$	7,9637826 $-$
$\log [1 : (m_\nu + k_\nu)]$		7,0364525 $-$	7,1536116 $+$	5,3802759 $-$
$\log \frac{q_\nu \operatorname{tg} \alpha_\nu}{m_\nu + k_\nu}$		7,2382169 $+$	7,5555808 $-$	7,9474941 $-$
$-\operatorname{tg} \omega_\nu$	$+$0,01396354	$+$0,00874390	$+$0,01411955	$+$0,00919831
$+\operatorname{tg} \omega_\nu'$	$-$0,00864885	$-$0,01411702	$-$0,00929744	$-$0,01396899
$-\operatorname{tg} \omega_\nu + \operatorname{tg} \omega_\nu'$	$+$0,00531469	$-$0,00537312	$+$0,00482211	$-$0,00477068
$+ \frac{q_\nu \operatorname{tg} \alpha_\nu}{m_\nu + k_\nu}$		$+$0,00173068	$+$0,00359402	$-$0,00886123
l_ν		$-$0,00364244	$+$0,00122809	$-$0,01363191
$\log q_\nu'$	2,6232493 $+$	2,2629928 $+$	2,2567292 $+$	4,6034611 $-$
$\log \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1}$	7,6369584 $-$	8,1468091 $-$	7,9637826 $-$	8,1452142 $-$
$\log \frac{1}{l_\nu}$	2,2745220 $+$	2,4386076 $-$	2,9107699 $+$	1,8654433 $-$
$\log m_{\nu+1}$	2,8347297 $-$	2,8484095 $+$	3,1312817 $-$	4,6141186 $-$

$$
\begin{array}{rl}
+\ 40129{,}257 & = -\ q_4' \\
-\ 41126{,}200 & = m_5 \\
\hline
-\ 996{,}943 & = m_5 - q_4' \\
\\
2{,}9986703\ - & = \log\,(m_5 - q_4') \\
8{,}1451718\ - & = \log \sin \alpha_5 \\
9{,}9999576\ + & = \log \cos \alpha_5 \\
\hline
1{,}1437997\ + & = \log\, Y_5
\end{array}
$$

Der Schnittpunkt der beiden benachbarten eintretenden Strahlen ist unendlich fern gewählt. Folglich ist $Y_1 = \infty$, $m_1 = \infty$, $l_1 = \operatorname{tg} \omega_1' - \operatorname{tg} \omega_1$. Deshalb fällt bei der ersten Brechung die Berechnung von $\frac{q_1 \operatorname{tg} \alpha_1}{m_1 + k_1}$ fort. Die fünfte Spalte enthält die Berechnung der Ordinate Y_5 des Schnittpunktes der beiden unendlich benachbarten austretenden Strahlen.

IV. Sagittalstrahlen.

Formel: $$\frac{1}{n_{\nu+1} Y_{\nu+1} \sin \alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{n_1 Y_1 \sin \alpha_1} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \frac{\sin(\omega_\varkappa' - \omega_\varkappa)}{n_\varkappa r_\varkappa \sin \omega_\varkappa \sin \alpha_\varkappa \sin \alpha_{\varkappa+1}}$$

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$\log \sin(\omega_\nu' - \omega_\nu)$	7,7254190 +	7,7301674 −	7,6831736 +	7,6785197 −
$\log(1 : n_\nu)$	0	9,7919889 +	0	9,8185669 +
$\log(1 : r_\nu)$	7,3767507 +	7,7399406 +	7,7478511 +	5,3964898 −
$\log(1 : \sin \omega_\nu)$	1,8550468 −	2,0583113 −	1,8502224 −	2,0363104 −
$\log(1 : \sin \alpha_\nu)$	1,8550468 −	2,0630579 −	1,8532336 −	2,0362358 −
$\log(1 : \sin \alpha_{\nu+1})$	2,0630579 −	1,8532336 −	2,0362358 −	1,8548282 −
	0,8753212 −	1,2366997 +	1,1707165 −	8,8209508 −
	− 7,5044897	1,8548282 −	$= \log(1 : \sin \alpha_5)$	
	+ 17,2464476	9,2890571 −	$= \log \frac{1}{\Sigma}$	
	+ 9,7419579	1,1438853 +	$= \log Y_5$	
	− 14,8155051	$Y_5 = 13{,}92789$		
	− 5,0735472			
	− 0,0662142			
	− 5,1397614			

Wie beim Meridionalstrahl ist $Y_1 = \infty$; infolgedessen wird $\frac{1}{n_1 \sin \alpha_1 Y_1} = 0$. Die fünfte Spalte enthält die Summation der einzelnen Summenglieder. In der letzten Spalte ist wieder Y_5 berechnet.

V. Windschiefer Strahl.

Formeln.

$$\tau_\nu = n_{\nu+1}\cos\omega'_\nu - n_\nu\cos\omega_\nu$$

$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu + \frac{x_\nu\tau_\nu}{r_\nu}$$

$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \frac{y_\nu\tau_\nu}{r_\nu}$$

$$\zeta_{\nu+1} = \zeta_\nu + \frac{z_\nu\tau_\nu}{r_\nu}$$

$$R_\nu = \sqrt{(r_\nu - k_{\nu+1})^2 + 2k_{\nu+1}(r_\nu - x_\nu)}$$

$$\cos\sigma_\nu = \frac{1}{R_\nu}\left(r_\nu\cos\omega'_\nu - k_{\nu+1}\frac{\xi_{\nu+1}}{n_{\nu+1}}\right)$$

$$\sin\omega_{\nu+1} = \frac{R_\nu\sin\sigma_\nu}{r_{\nu+1}}$$

$$\sin\omega'_{\nu+1} = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}}\sin\omega_\nu$$

$$t_{\nu+1} = \frac{1}{n_{\nu+1}}(r_\nu\cos\omega_{\nu+1} - R_\nu\cos\sigma_\nu)$$

$$x_{\nu+1} = x_\nu - k_{\nu+1} + t_{\nu+1}\xi_{\nu+1}$$

$$y_{\nu+1} = y_\nu + t_{\nu+1}\eta_{\nu+1}$$

$$z_{\nu+1} = z_\nu + t_{\nu+1}\zeta_{\nu+1}$$

$$\cos\omega_1 = \frac{x_1}{r_1}\xi_1 + \frac{y_1}{r_1}\cdot\eta_1 + \frac{z_1}{r_1}\xi_1$$

$$\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2 = n_\nu^2$$

$$x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2 = r_\nu^2$$

Das Vorzeichen von $\cos\omega_\nu$ und $\cos\omega'_\nu$ ist stets entgegengesetzt dem von r_ν bei den vorhergehenden Berechnungen. Sämtliche Größen r_ν und R_ν sind positiv zu nehmen.

Anfangskonstanten:

$$\xi_1 = +\,0{,}99\,990\,256$$
$$\eta_1 = 0$$
$$\zeta_1 = +\,0{,}013\,962\,180$$
$$x_1 = -\,418{,}70\,156$$
$$y_1 = +\,33$$
$$z_1 = 0$$

$\log x_1 =$	2,6219046 −		
$\log(1 : r_1) =$	7,3767507 +	$n_2\cos\omega'_1 =$	−1,6124268
$\log\xi_1 =$	9,9999577 +	$-n_1\cos\omega_1 =$	+0,9968114
$\log\cos\omega_1 =$	9,9986130 −	$\tau_1 =$	−0,6156154
$\log\sin\omega_1 =$	8,9019616	$\log\tau_1 =$	9,7893095 −
$\log\frac{n_1}{n_2} =$	9,7919889	$\log(1 : r_1) =$	7,3767507 +
$\log\sin\omega'_1 =$	8,6939505	$\log(\tau_1 : r_1) =$	7,1660602 −
$\log\cos\omega'_1 =$	9,9994689 −		
$\log n_2 =$	0,2080111 +	$\log x_1 =$	2,6219046 −
$\log(n_2\cos\omega'_1) =$	0,2074800 −	$\log\frac{\tau_1 x_1}{r_1} =$	9,7879648 +

$\log \frac{\tau_1}{r_1} =$ 7,1660602 −

$\log y_1 =$ 1,5185139 +

$\log \frac{\tau_1 \cdot y_1}{r_1} =$ 8,6845741 −

$\xi_1 =$ + 0,99990256

$\frac{\tau_1 x_1}{r_1} =$ + 0,61371225

$\xi_2 =$ + 1,61361481

$\log 2k_2 =$ 2,6739512 −

$\log (r_1 - x_1) =$ 2,9236074 +

$\log [2k_2(r_1 - x_1)] =$ 5,5975586 −

$\log (r_1 - k_2) =$ 2,8169071

$\log (r_1 - k_2)^2 =$ 5,6338143

$(r_1 - k_2)^2 =$ + 430 342,57

$2k_2(r_1 - x_1) =$ − 395 875,45

$R_1^2 =$ + 34 467,12

$\log R_1^2 =$ 4,5374050

$\log R_1 =$ 2,2687025

$\log r_1 =$ 2,6232493 +

$\log \cos \omega_1' =$ 9,9994689 −

$\log (r_1 \cos \omega_1') =$ 2,6227182 −

$\log (- k_2) =$ 2,3729212 +

$\log \xi_2 =$ 0,2077999 +

$\log \frac{1}{n_2} =$ 9,7919889 +

$\log \frac{- k_2 \xi_2}{n_2} =$ 2,3727100 +

$r_1 \cos \omega_1' =$ − 419,48 670

$- k_2 \frac{\xi_2}{n_2} =$ + 235,89 027

$R_1 \cos \sigma_1 =$ − 183,59 643

$\log (R_1 \cos \sigma_1) =$ 2,2638643 −

$\log (1 : R_1) =$ 7,7312975 +

$\log \cos \sigma_1 =$ 9,9951618 −

$\log R_1 =$ 2,2687025

$\log (1 : r_1) =$ 7,7399406

$\log \sin \sigma_1 =$ 9,1715515

$\log \sin \omega_2 =$ 9,1801946

$\log \frac{n_2}{n_3} =$ 0,2080111

$\log \sin \omega_2' =$ 9,3882057

$\log r_2 =$ 2,2600594 +

$\log \cos \omega_2 =$ 9,9949630 −

$\log r_2 \cos \omega_2 =$ 2,2550224 −

$r_2 \cos \omega_2 =$ − 179,89 636

$- R_1 \cos \sigma_1 =$ + 183,59 643

$t_2 n_2 =$ + 3,70 007

$\log (t_2 n_2) =$ 0,5682100 +

$\log \frac{1}{n_2} =$ 9,7919889 +

$\log t_2 =$ 0,3601989 +

$\log \xi_2 =$ 0,2077999 +

$\log (t_2 \xi_2) =$ 0,5679988 +

$\log t_2 =$ 0,3601989 +

$\log \eta_2 =$ 8,6845741 −

$\log (t_2 \eta_2) =$ 9,0447730 −

$\log t_2 =$ 0,3601989 +

$\log \xi_2 =$ 8,1449532 −

$\log (t_2 \xi_2) =$ 8,5051521 −

$x_1 =$ − 418,70 156

$- k_2 =$ + 236,00 500

$x_1 - k_2 =$ − 182,69 656

$t_2 \xi_2 =$ + 3,69 827

$x_2 =$ − 178,99 829

$y_1 =$ + 33

$t_2 \eta_2 =$ − 0,1108595

$y_2 =$ + 32,8891405

$\log \cos \omega_2' =$ 9,9866194 −

$\log n_2 =$ 0,2080111 +

$\log \cos \omega_2 =$ 9,9949630 −

$\log (n_2 \cos \omega_2) =$ 0,2029741 −

$n_3 \cos \omega_2' =$ − 0,9696598

$- n_2 \cos \omega_2 =$ + 1,5957839

$\tau_2 =$ + 0,6261241

$\log \tau_2 =$ 9,7966604 +

$\log (1 : r_2) =$ 7,7399406 +

$\log \frac{\tau_2}{r_2} =$ 7,5366010 +

$\log x_2 =$ 2,2528488 −

$\log \frac{\tau_2 x_2}{r_2} =$ 9,7894498 −

$\log \frac{\tau_2}{r_2} =$ 7,5366010 +
$\log y_2 =$ 1,5170525 +
$\log \frac{\tau_2 y_2}{r_2} =$ 9,0536535 +

$\log \frac{\tau_2}{r_2} =$ 7,5366010 +
$\log z_2 =$ 8,5051521 +
$\log \frac{\tau_2 \cdot z_2}{r_2} =$ 6,0417531 +

$\xi_2 =$ + 1,61361481
$\frac{\tau_2 x_2}{r_2} =$ − 0,61581437
$\xi_3 =$ + 0,99780044

$\eta_2 =$ − 0,048369778
$\frac{\tau_2 y_2}{r_2} =$ + 0,113149714
$\eta_3 =$ + 0,064779936

$\zeta_2 =$ + 0,013962180
$\frac{\tau_2 z_2}{r_2} =$ + 0,000110091
$\zeta_3 =$ + 0,014072271

$\log (r_2 - k_3) =$ 2,2678051
$\log (r_2 - k_3)^2 =$ 4,5356102

$\log 2k_3 =$ 0,8162413 −
$\log (r_2 - x_2) =$ 2,5574991 +
$\log [2k_3 (r_2 - x_2)] =$ 3,3737404 −

$(r_2 - k_3)^2 =$ + 34 324,976
$2k_3 (r_2 - x_2) =$ − 2 364,506
$R_2^2 =$ + 31 960,47

$\log R_2^2 =$ 4,5046132
$\log R_2 =$ 2,2523066

$\log r_2 =$ 2,2600594 +
$\log \cos \omega_2' =$ 9,9866194 −
$\log r_2 \cos \omega_2' =$ 2,2466778 −

$\log (- k_3) =$ 0,5152113 +
$\log \xi_3 =$ 0,9990437 +
$\log (- k_3 \xi_3) =$ 0,5142550 +

$r_2 \cos \omega_2' =$ − 176,47321
$k_3 \frac{\xi_3}{n_3} =$ + 3,26780
$R_2 \cos \sigma_2 =$ − 173,20541

$\log R_2 \cos \sigma_2 =$ 2,2385614 −
$\log (1 : R_2) =$ 7,7476934 +
$\log \cos \sigma_2 =$ 9,9862548 −

$\log R_2 =$ 2,2523066
$\log (1 : r_3) =$ 7,7478511
$\log \sin \sigma_2 =$ 9,3938622
$\log \sin \omega_3 =$ 9,3940199 +
$\log \frac{n_3}{n_4} =$ 9,8185669 +
$\log \sin \omega_3' =$ 9,2125868 +

$\log r_3 =$ 2,2521489 +
$\log \cos \omega_3 =$ 9,9862441 −
$\log (r_3 \cos \omega_3) =$ 2,2383930 −

$r_3 \cos \omega_3 =$ − 173,13825
$- R_2 \cos \sigma_2 =$ + 173,20541
$t_3 =$ + 0,06716

$\log t_3 =$ 8,8271107 +
$\log \xi_3 =$ 9,9990437 +
$\log (t_3 \xi_3) =$ 8,8261544 +

$\log t_3 =$ 8,8271107 +
$\log \eta_3 =$ 8,8114405 +
$\log (t_3 \eta_3) =$ 7,6385512 +

$\log t_3 =$ 8,8271107 +
$\log \zeta_3 =$ 8,1483642 +
$\log (t_3 \zeta_3) =$ 6,9754749 +

$x_2 =$ − 178,99829
$- k_3 =$ + 3,27500
$x_2 - k_3 =$ − 175,72329
$t_3 \xi_3 =$ + 0,06701
$x_3 =$ − 175,65628

$y_2 =$ 32,8891405
$t_3 \eta_3 =$ 0,0043506
$y_3 =$ 32,8934911

$\log n_4 = 0{,}1814331 +$
$\log \cos \omega_3' = 9{,}9941417 -$
$\log (n_4 \cos \omega_3') = 0{,}1755748 -$

$n_4 \cos \omega_3' = -1{,}4982172$
$-n_3 \cos \omega_3 = +0{,}9688222$
$\tau_3 = -0{,}5293950$

$\log \tau_3 = 9{,}7237798 -$
$\log \frac{1}{r_3} = 7{,}7478511 +$
$\log \frac{\tau_3}{r_3} = 7{,}4716309 -$
$\log x_3 = 2{,}2446637 -$
$\log \frac{\tau_3 x_3}{r_3} = 9{,}7162946 +$

$\log \frac{\tau_3}{r_3} = 7{,}4716309 -$
$\log y_3 = 2{,}2446637 -$
$\log \frac{\tau_3 y_3}{r_3} = 9{,}7162946 +$

$\log \frac{\tau_3}{r_3} = 7{,}4716309 -$
$\log z_3 = 8{,}5177928 +$
$\log \frac{\tau_3 z_3}{r_3} = 5{,}9894237 -$

$\frac{\tau_3 x_3}{r^2} = +0{,}52034881$
$\xi_3 = +0{,}99780044$
$\xi_4 = 1{,}51814925$

$\frac{\tau_3 y_3}{r_3} = -0{,}097440795$
$\eta_3 = +0{,}064779936$
$\eta_4 = -0{,}032660859$

$\frac{\tau_3 z_3}{r_3} = -0{,}000097594$
$\zeta_3 = +0{,}014072271$
$\zeta_4 = +0{,}013974677$

$\log (r_3 - k_4) = 4{,}6073072$
$\log (r_3 - k_4)^2 = 9{,}2146144$

$\log (2k_4) = 4{,}9064160 -$
$\log (r_3 - x_3) = 2{,}5494523 +$
$\log [2k_4 (r_3 - x_3)] = 7{,}4558683 -$

$(r_3 - k_4)^2 = +1639133710$
$2k_4 (r_3 - x_3) = -28567244$
$R_3^2 = 1610566466$

$\log R_3^2 = 9{,}2069786$
$\log R_3 = 4{,}6034893$
$\log k_4 = 4{,}6053859 -$
$\log \xi_4 = 0{,}1813144 +$
$\log \frac{1}{n_4} = 9{,}8185669 +$
$\log \frac{k_4 \xi_4}{n_4} = 4{,}6052672 -$

$\log r_3 = 2{,}2521489 +$
$\log \cos \omega_3' = 9{,}9941417 -$
$\log (r_3 \cos \omega_3') = 2{,}2462906 -$
$r_3 \cos \omega_3' = -176{,}316$
$-k_4 \frac{\xi_4}{n_4} = +40296{,}491$
$R_3 \cos \sigma_3 = +40120{,}175$

$\log (R_3 \cos \sigma_3) = 4{,}6033628 +$
$\log (1 : R_3) = 5{,}3965107 +$
$\log \cos \sigma_3 = 9{,}9998735 +$
$\log R_3 = 4{,}6034893$
$\log (1 : r_4) = 5{,}3964898$
$\log \sin \sigma_3 = 8{,}3825874$
$\log \sin \omega_4 = 8{,}3825665$
$\log \frac{n_4}{n_5} = 0{,}1814331$
$\log \sin \omega_4' = 8{,}5639996$

$\log r_4 = 4{,}6035102 +$
$\log \cos \omega_4 = 9{,}9998735 +$
$\log (r_4 \cos \omega_4) = 4{,}6033837 +$
$r_4 \cos \omega_4 = +40122{,}102$
$-R_3 \cos \sigma_3 = -40120{,}175$
$t_4 n_4 = 1{,}927$

$\log (t_4 n_4) = 0{,}2848817 +$
$\log \frac{1}{n_4} = 9{,}8185669 +$
$\log t_4 = 0{,}1034486 +$
$\log \xi_4 = 0{,}1813144 +$
$\log (t_4 \xi_4) = 0{,}2847630 +$

$\log t_4 = 0{,}1034486+$
$\log \eta_4 = 8{,}5140276-$
$\log(t_4\eta_4) = 8{,}6174762-$

$\log t_4 = 0{,}1034486+$
$\log \xi_4 = 8{,}1453418+$
$\log t_4\xi_4 = 8{,}2487904+$

$x_3 = -\ 175{,}65628$
$-k_4 = +40307{,}51000$
$x_3 - k_4 = +40131{,}85372$
$t_4\xi_4 = +\ 1{,}92647$
$x_4 = +40133{,}78019$

$y_3 = 32{,}8934911$
$t_4\eta_4 = -\ 0{,}0414454$
$y_4 = 32{,}8520457$

$z_3 = +0{,}032945250$
$t_4\xi_4 = +0{,}017733339$
$z_4 = 0{,}050678589$

$\log\cos\omega_4' = 9{,}9997082+$

$\log n_4 = 0{,}1814331+$
$\log\cos\omega_4 = 9{,}9998735+$
$\log(n_4\cos\omega_4) = 0{,}1813066+$

$n_5\cos\omega_4' = +0{,}9993284$
$-n_4\cos\omega_4 = -1{,}5181217$
$\tau_4 = -0{,}5187933$

$\log\tau_4 = 9{,}7149943-$
$\log(1:r_4) = 5{,}3964898+$
$\log\frac{\tau_4}{r_4} = 5{,}1114841-$
$\log x_4 = 4{,}6035100+$
$\log\frac{\tau_4 x_4}{r_4} = 9{,}7149941-$

$\log\frac{\tau_4}{r_4} = 5{,}1114841-$
$\log y_4 = 1{,}5165624+$
$\log\frac{\tau_4 y_4}{r_4} = 6{,}6280465-$

$\log\frac{\tau_4}{r_4} = 5{,}1114841-$
$\log z_4 = 8{,}7048245+$
$\log\frac{\tau_4 z_4}{r_4} = 3{,}8163086-$

$\xi_4 = +1{,}51814925$
$\frac{\tau_4 x_4}{r_4} = -0{,}51879298$
$\xi_5 = +0{,}99935627$

$\eta_4 = -0{,}032660859$
$\frac{\tau_4 y_4}{r_4} = -0{,}000424665$
$\eta_5 = -0{,}033085524$

$\xi_4 = +0{,}013974677$
$\frac{\tau_4 z_4}{r_4} = -0{,}000000655$
$\xi_5 = +0{,}013974022$

Da der gebrochene Strahl die Gleichungen

$$x = x_4 + t\xi_5$$

$$y = y_4 + t\eta_5$$

$$z = z_4 + tz_5$$

hat, so findet man seinen Durchstoßungspunkt mit der Ebene $x = C$ durch Elimination von t:

$$^C x = C$$

$$^C y = y_4 + \frac{C - x_4}{\xi_5}\cdot\eta_5$$

$$^C z = z_4 + \frac{C - x_4}{\xi_5}\cdot\zeta_5.$$

In dem von Steinheil gewählten Beispiel ist $C = +41126{,}342$, also

$$
\begin{aligned}
C - x_4 &= \quad 992{,}562 \\
\log(C - x_4) &= \quad 2{,}9967576 + \\
\log(1 : \xi_5) &= \quad 0{,}0002796 + \\
\log\frac{C - x_4}{\xi_5} &= \quad 2{,}9970372 + \\
\log \eta_5 &= \quad 8{,}5196380 - \\
\log\frac{C - x_4}{\xi_5}\eta_5 &= \quad 1{,}5166752 - \\
\log\frac{C - x_4}{\xi_5} &= \quad 2{,}9970372 + \\
\log \xi_5 &= \quad 8{,}1453214 + \\
\log\frac{(C - x_4)\xi_5}{\xi_5} &= \quad 1{,}1423350 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{C - x_4}{\xi_5} \cdot \eta_5 &= -\ 32{,}86035 \\
y_4 &= \quad 32{,}85205 \\
{}^c y &= +\ 0{,}0083
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{C - x_4}{\xi_5} \cdot \xi_5 &= +\ 13{,}87826 \\
z_4 &= +\ 0{,}05068 \\
{}^c z &= +\ 13{,}92894
\end{aligned}
$$

Lebenslauf.

Max Lange, Sohn des Kaufmanns Emil Lange, wurde am 25. April 1883 zu Stettin geboren. Er besuchte das Stadtgymnasium zu Stettin, das Realgymnasium des Johanneums zu Hamburg, das Christianeum zu Altona a. E. und erhielt das Zeugnis der Reife am Stadtgymnasium seiner Vaterstadt. Er studierte darauf von Ostern 1902 bis Ostern 1905 an der Berliner Universität Mathematik und Physik und bewies zu Anfang des Jahres 1906 in der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen die Lehrbefähigung in der Mathematik für die erste, der Physik für die zweite Stufe. L. ist zurzeit wissenschaftlicher Mitarbeiter der Optischen Anstalt C. P. Goerz.